

Nikola TOMAŠEVIĆ
Maja Vukšić

PRIMENJENA MATEMATIKA I

MATEMATIKA 2

VISOKA POSLOVNO TEHNIČKA ŠKOLA
DOBOJ

Izdavač:

Visoka poslovno tehnička škola Doboj

Za izdavača:

Dr Ladin Gostimirović

Urednik:

Dr Ladin Gostimirović

Recenzenti:

Prof. dr Miodrag Ivović

Prof. dr Radič Vučićević

Lektor i korektor:

Dr Slavica Gostimirović

Naslovna strana i kompjuterski prelom:

Radomir Simikić

Štampa:

F&F doo Jelah

Za štampariju:

Fahrudin Mujaković

Tiraž:

300

Doboj, 2017.

ISBN

978-99976-689-2-9

**VISOKA POSLOVNO TEHNIČKA ŠKOLA
D O B O J**

**Prof. dr Nikola Tomašević
Dipl. ecc Maja Vukšić**

**PRIMENJENA MATEMATIKA I
MATEMATIKA 2**

PREGOVOR

Ovaj udžbenik namenjen je, pre svega, studentima Visoke poslovno tehničke škole u Doboju za pripremu ispita iz predmeta Primenjena matematika i Matematika 2, a urađen je prema nastavnom planu i programu škole za navedene predmete. Isti može biti koristan i studentima drugih fakulteta i škola na kojima se gradivo matematičke analize ili linearne algebre obrađuje u sličnom obimu, kao i čitaocima koji žele da osveže znanje iz matematike.

Udžbenik je koncipirana tako da svako poglavlje sadrži osnove teorije sa rešenim primerima u meri koja zadovoljava potrebe studenata za uspešno pripremanje ispita. Teorijska objašnjenja su svedena na najmanju meru a prednost je data većem broju primera.

Znanje matematike je potrebno svakome ko se želi baviti tehničkim i ekonomskim problemima. U nauci je važan pojam funkcionalnosti kojeg susrećemo i u ekonomiji i u tehnici. U svim tim slučajevima važno je da se shvati, šta je to funkcija i kako se ona grafički predstavlja.

Matematika je studentima potrebna osim toga i kao škola ispravnog mišljenja. Taj matematički način mišljenja ne stiće se olako i ne postoje gotovi algoritmi, nego se do njega dolazi upornim radom i poznavanjem matematičkih pojmova.

Problemi u ekonomiji velikim delom su kvantitativne prirode, te je potrebno znati i one posebne delove primenjene matematike, koji su poznati pod imenom privredne matematike, a u kojoj se uči kako se vrše računi u trgovini, industriji, bankama, osiguravajućim kućama itd., kao i način rešavanja problema koje susrećemo u privredi.

Važno je da se u matematici formule ne uče napamet, već poznavanje njihovog značenja i njihove primene. Najveću grešku čine oni koji računaju pomoću formula koje ne razume, jer kad nastane greška, onda ćemo zapeti ako ne razumemo značenje formule, te je kod primene matematike u praksi važna sigurnost računanja. Nije najgore, ako nam se u računu potkrade greška, ali nije dobro ako ne vidimo da rezultat, do kojeg smo došli, nije dobar. Važno je znati da li je jedna veličina do koje smo došli računom uopšte moguća, da li odgovara postavljenom zadatku. Dakle, kod svakog računa potrebna je kontrola rezultata, odnosno ne smemo se zadovoljiti rezultatom do kojeg smo došli, ako se nismo bilo kojom kontrolom uverili da je rezultat ispravan.

Pojedini delovi odabrani su tako, da obrade sva ona pitanja, koja smo u uvodu istakli i da se pokažu najvažnije primene matematike u praksi. Svi ti delovi obrađuju pojedina područja matematike za ekonomiste, kao što su npr. privredna matematika, finansijska matematika itd.; svaki deo u tom pogledu je posebna grana te nauke.

U drugom delu je obrađen neodređeni i određeni integral kao i njihova primena, te funkcije dve promenljive. Na kraju su obrađene diferencijalne jednačine prvog i drugog reda i dvostruki integral. Međutim, svi delovi zajedno čine zaokruženu celinu, jer su povezani onim osnovnim principima, za koje smo već naglasili, da su potrebni studentima..

Stoga verujemo, da će ovaj udžbenik biti koristan budućim ekonomistima i tehničarima kod proučavanja ekonomskih i tehničkih problema i kod rešavanja zadataka s kojima će se susresti u privredi.

Autori se zahvaljuje recenzentima i ostalim saradnicima koji su pomogli da ovaj udžbenik dobije baš ovakvu formu i sadržinu, a svaku primedbu i savet za njegovo poboljšanje ćemo sa pažnjom razmotriti i ugraditi u nekom sledećem izdanju.

SADRŽAJ

1. FUNKCIONALNA ZAVISNOST EKONOMSKIH VELIČINA.....	15
1. POJAM I VRSTE EKONOMSKIH FUNKCIJA.....	15
1.1. Funkcija tražnje.....	15
1.2. Funkcija ponude.....	20
1.3. Ravnoteža (ekvilibrijum) ponude i tražnje.....	22
1.4. Krive indiferencije.....	25
1.5. Funkcija proizvodnje.....	28
1.6. Izokvanta. Marginalna stopa supstitucije.....	32
1.7. Funkcija troškova.....	33
1.8. Engelova kriva.....	36
2. ELASTIČNOST, POJAM, MERENJE I PRIMENA.....	38
2.1. Koeficijent elastičnosti u tački.....	38
2.2. Koeficijenti parcijalne i ukrštene elastičnosti.....	43
2.3. Engelovi empirijski zakoni u terminima elastičnosti.....	45
2.4. Amoroso-Robinsonova formula.....	47
2.5. Elastičnost troškova proizvodnje.....	49
2. OSNOVNI PRIVREDNI RAČUN.....	53
1. PROPORCIONALNOST VELIČINA.....	53
2. PROSTO I SLOŽENO PRAVILO TROJNO.....	57
2.1. Prosto pravilo trojno.....	57
2.2. Složeno pravilo trojno.....	59
3. VERIŽNI RAČUN.....	62
3. PROCENTNI RAČUN.....	65
1. PROCENTNI RAČUN OD STO.....	66
2. PROCENTNI RAČUN NA STO I U STO.....	67
3. KONFORMNA STOPA.....	68
4. NEKE PRIMENE PROCENTNOG RAČUNA.....	69
4. KAMATNI RAČUN.....	73
1. PROSTI KAMATNI RAČUN.....	75
1.1. Prosti kamatni račun od sto.....	76
1.2. Prosti kamatni račun "na sto" i "u sto".....	79
2. PRIMENA PROSTOG KAMATNOG RAČUNA.....	82
2.1. Srednji rok plaćanja.....	82
2.2. Eskontovanje menica.....	86
2.2.1. Preračunavanje kamatnih stopa za komercijalni i racionalni eskont.....	95
2.2.2. Odlaganje isplate menice.....	95
2.2.3. Reeskontovanje.....	96
2.3. Potrošački krediti.....	97
3. SLOŽENI KAMATNI RAČUN SA DEKURZIVNIM.....	100

NAČINOM KAPITALISANJA	100
3.1. Krajnja vrednost kapitala	100
3.2. Izračunavanje vremena i kamatne stope	103
3.3. Vrste kamatnih stopa	105
3.3.1. Nominalna kamatna stopa.....	105
3.3.2. Efektivna kamatna stopa	106
3.3.3. Relativna i konformna kamatna stopa.....	106
3.3.4. Neprekidno kapitalisanje	110
3.3.5. Transformacija kamatnih stopa neprekidnog kapitalisanja.....	114
u prekidne i obrnuto	114
4. SLOŽENI KAMATNI RAČUN SA ANTICIPATIVNIM NAČINOM KAPITALISANJA	117
4.1. Početna i krajnja vrednost kapitala kod složenog kamatnog račun sa anticipativnim načinom kapitalisanja	117
4.2. Izračunavanje vremena kod anticipativnog kapitalisanja	120
4.3. Izračunavanje anticipativne kamatne stope q	121
4.4. Ekvivalentne anticipativne kamatne stope.....	121
4.5. Veza između anticipativne i dekurzivne kamatne stope	122
4.6. Neprekidno anticipativno kapitalisanje.....	123
4.7. Model kombinovanog prostog i složenog kamatnog računa sa anticipativnom kamatnom stopom.....	124
4.7.1. Krajnja i početna vrednost kapitala.....	124
4.7.2. Određivanje vremena kod kombinovanog ukamačivanja.....	127
4.7.3. Anticipativna konformna kamatna stopa.....	128
5. RAČUN ULOGA (PERIODIČNA PLAĆANJA).....	131
1. ULOZI SA DEKURZIVNIM NAČINOM OBRAČUNA KAMATA.....	131
1.1. Opšti slučaj	131
1.2. Anticipativni način ulaganja.....	133
1.2.1. Vreme ulaganja.....	138
1.2.2. Izračunavanje kamatne stope	141
1.3. Dekurzivni način ulaganja	143
1.3.1. Vreme ulaganja.....	146
1.3.2. Izračunavanje kamatne stope	147
6. ODREĐIVANJE RENTE I RAČUN RENTE.....	149
1. ANTICIPATIVNE RENTE SA DEKURZIVNOM KAMATNOM STOPOM	153
1.1. Algoritmi za mizu i rentu.....	153
1.2. Određivanje vremena primanja rente	157
1.3. Izračunavanje kamatne stope.....	160
1.4. Algoritam za stalne rente u serijama	161
1.5. Algoritam vežite rente	165
2. ODREĐIVANJE PARAMETARA DEKURZIVNE RENTE SA DEKURZIVNOM KAMATNOM STOPOM.....	166

2.1. Određivanje mjze i rente.....	166
2.2. Određivanje vremena primanja rente.....	168
2.3. Određivanje kamatne stope.....	170
2.4. Određivanje stalne rente u serijama.....	172
2.5. Određivanje parametrara večite dekurzivne rente.....	175
7. KREDITI.....	177
1. AMORTIZACIJA KREDITA METODOM JEDNAKIH OTPLATA SA DEKURZIVNOM KAMATNOM STOPOM.....	178
1.1. Određivanje anuiteta i kamata.....	178
1.2. Određivanje ukupne kamate i zbira kamata sadržani od.....	181
j – tog do k – tog anuiteta.....	181
1.3. Plan amortizacije u slučaju jednakih otplata.....	183
2. AMORTIZACIJA KREDITA METODOM JEDNAKIH ANUITETA SA DEKURZIVNOM KAMATNOM STOPOM.....	187
2.1. Određivanje anuiteta, stanja duga i ukupne kamate.....	188
2.2. Određivanje iznosa kamate i otplate u i – tom anuitetu.....	191
2.3. Određivanje otplaćenog dela duga nakon isplaćenog i – tog anuiteta.....	193
2.4. Određivanje ukupnih otplata i kamata sadržanih od j – tog do k – tog anuitet.....	194
2.5. Amortizacioni plan kredita metodom jednakih anuiteta.....	196
DRUGI DEO.....	203
1. NEODREĐENI INTEGRAL.....	205
1. PRIMITIVNA FUNKCIJA I NEODREĐENI INTEGRAL.....	205
1.1. Osobine neodređenog integrala.....	209
1.2. Tablica neodređenih integrala.....	211
1.3. Smena promenljivih u neodređenom integralu.....	214
1.4. Metoda parcijalne integracije.....	216
1.5. Integracija racionalnih funkcija.....	220
1.6. Integracija iracionalnih funkcija.....	228
1.7. Integracija trigonometrijskih funkcija.....	236
2. ODREĐENI INTEGRAL.....	247
1. PROBLEM POVRŠINE KRIVOLINIJSKE FIGURE.....	247
2. DONJA I GORNJA DARBUOVA SUMA. INTEGRALNE SUME.....	249
3. USLOVI INTEGRABILNOSTI FUNKCIJE.....	253
3.1. Klase integrabilnih funkcija.....	255
4. OSOBINE ODREĐENOG INTEGRALA.....	259
4.1. Njutn-Lajbnicova formula.....	271
4.2. Veza određenog i neodređenog integrala.....	273
4.3. Metoda smene u određenom integralu.....	275
4.4. Parcijalna integracija.....	278
5. POJAM NESVOJSTVENOG INTEGRALA.....	279

5.1. Kriterijumi za konvergenciju nesvojstvenog integrala	285
6. PRIMENA ODREĐENOG INTEGRALA	288
6.1. Površina ravnih figura	288
6.1.1. Površina ravne figure zadate u polarnim koordinatama.....	292
6.2. Dužina luka krivih u ravni	295
6.3. Izračunavanje površine obrtnih tela	301
6.4. Izračunavanje zapremine obrtnih tela	304
3. FUNKCIJE DVE I VIŠE PROMENLJIVIH	307
1. POJAM FUNKCIJE DVE I VIŠE PROMENLJIVIH	307
2. PARCIJALNI IZVODI I PARCIJALNI DIFERENCIJALI	310
2.1. Izvod složenih funkcija.....	326
2.2. Implicitne funkcije	329
2.3. Ekstremumi funkcija dve i više promenljivih.....	332
2.4. Uslovni ekstremumi.....	341
4. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE	351
1. POJAM DIFERENCIJALNE JEDNAČINE.....	351
2. OBIČNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA PRVOG REDA.....	353
2.1. Opšte i partikularno rešenje diferencijalne jednačine prvog reda. Košijeva teorema	353
2.2. Metoda razdvajanja promenljivih.....	357
2.3. Homogena diferencijalna jednačina	361
2.4. Diferencijalne jednačine koje se svode na homogene	364
2.5. Linearna diferencijalna jednačina prvog reda.....	368
2.6. Bernulijeva diferencijalna jednačina.....	373
2.7. Diferencijalna jednačina sa totalnim diferencijalom.....	377
2.8. Integracioni faktor.....	381
3. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA.....	387
3.1. Osnovne definicije i Košijeva teorema	387
3.2. Neki tipovi diferencijalnih jednačina drugog reda	391
3.3. Linearne diferencijalne jednačine drugog reda.....	394
3.4. Linearna diferencijalna jednačina drugog reda..... sa konstantnim koeficijentima.....	404
3.5. Nehomogena linearna jednačina drugog reda	409
sa konstantnim koeficijentima.....	409
5. DVOSTRKI INTEGRALI.....	429
1. POJAM DVOSTRUKOG INTEGRALA.....	429
2. IZRAČUNAVANJE DVOSTRUKOG INTEGRALA	432
3. ZAPREMINA TELA	440
4. OPŠTI SLUČAJ SMENE PROMENLJIVIH U DVOSTRUKOM INTEGRALU.....	444
5. PRIMENA DVOSTRUKOG INTEGRALA NA.....	448
ZADATKE MEHANIKE	448

Primenjena matematika i matematika 2

5.1. Moment inercije površine ravne figure	448
5.2. Koordinate težišta	450
LITERATURA:	454

CIP - Каталогизacija u publikaciji
Narodna i univerzitetska biblioteka
Republike Srpske, Baња Лука

517(075.8)

51-77(075.8)

ТОМАШЕВИЋ, Никола

Primenjena matematika i matematika 2 / Nikola Tomašević, Maja
Vukšić. - Doboј : Visoka poslovno tehnička škola, 2017 (Jelah : F&F). -
456 str. : graf. prikazi ; 25 cm

Tiraž 300. - Bibliografija: str. 454-455.

ISBN 978-99976-689-2-9

1. Вукшић, Маја [аутор]

COBISS.RS-ID 6383896